

SÉRIES TEMPORELLES. EXAMEN D'APPEL (2H).

(English version on the back of the sheet)

Documents et appareils électroniques non autorisés. Toute réponse doit être justifiée et lisible. La qualité de la rédaction pourra être prise en compte dans la notation. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif. Vous pouvez répondre en français ou en anglais. Les exercices sont mutuellement indépendants.

Exercice 1. Questions de cours.

- (1) Définir la suite des coefficients de Fourier d'une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$.
- (2) Rappeler ce qu'est une suite complexe de type positif (au sens complexe).
- (3) Énoncer enfin le théorème de représentation spectrale d'Herglotz.

Exercice 2. Soit Z un bruit blanc centré et de variance unitaire. On considère l'équation ARMA(1,2) suivante:

$$X_t - X_{t-1} = Z_t - 2\beta Z_{t-1} + Z_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

de paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

- (4) Mettre l'équation sous la forme ARMA(Φ, Ψ) où Φ et Ψ sont deux polynômes à déterminer. C'est une équation ARMA(Φ, Ψ) avec

$$\Phi(z) = 1 - z$$

$$\Psi(z) = 1 - 2\beta z + z^2.$$

- (5) En fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$, discuter du nombre de solutions stationnaires et du nombre de solutions stationnaires *linéaires* de cette équation. Remarquons tout d'abord que Φ a une unique racine de module un (égale à 1), de multiplicité un. D'autre part, $\Psi(1) = 2(1 - \beta)$. On en déduit, par théorème du cours, la distinction de cas suivante:
 - Si $\beta = 1$, alors l'unique racine de module un de Φ est compensée par Ψ , et l'équation possède une infinité de solutions stationnaires, dont une seule est linéaire.
 - Si $\beta \neq 1$ alors il n'y a pas compensation. Dans ce cas, il n'y a aucune solution stationnaire (et a fortiori aucune solution stationnaire linéaire).
- (6) Dans le cas $\beta = 1$, donner (en justifiant) une solution stationnaire linéaire (explicite) et une solution stationnaire non linéaire (explicite). Expliquer pourquoi cette dernière n'est pas linéaire. Notons tout d'abord que si $\beta = 1$ alors $\Psi(z) = (1 - z)^2$. En poursuivant le raisonnement de la question précédente, l'unique solution stationnaire linéaire est la solution de l'équation réduite ARMA($\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$), où $\tilde{\Phi}(z) = 1$ et $\tilde{\Psi}(z) = 1 - z$, c'est-à-dire le processus défini par $X_t = Z_t - Z_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Soit A une variable aléatoire (non trivialement nulle) de carré intégrable et non corrélée au processus Z . On vérifie sans peine que le processus $(X_t + A)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une solution stationnaire de l'équation. Celle-ci n'est pas linéaire car sa mesure spectrale possède un atome en 0.

Exercice 3. Soit Z un bruit blanc centré et de variance unitaire. On considère l'équation AR(2) suivante:

$$9X_t - 6X_{t-1} + X_{t-2} = Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- (7) Montrer que cette équation possède une unique solution stationnaire, que l'on continuera à noter X . Le polynôme associé au membre de gauche de cette équation est $\Phi(z) = 9 - 6z + z^2 = (z - 3)^2$. Il n'y a pas de racine de module un, donc l'équation possède une unique solution stationnaire.

Date: Mercredi 1er juillet 2026.

- (8) Écrire X comme filtrage explicite de Z . Montrer que X est causal. On sait par ailleurs, par le cours, que la solution X évoquée ci-dessus est linéaire et s'écrit $X = F_\alpha(Z)$, filtrage de Z par $\alpha \in \ell_1(\mathbb{Z})$ où α est caractérisé par sa représentation en série de puissances:

$$P_\alpha(z) = \frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{(z-3)^2} = (\dots) = \sum_{k \geq 0} (k+1)3^{-(k+2)} z^k, \quad z \in \mathbb{U}.$$

($\mathbb{U}$ est le cercle unité). Le calcul est réalisé en développant $1/(3-z)$ en série entière, puis en dérivant. On obtient alors

$$X_t = \sum_{k \geq 0} (k+1)3^{-(k+2)} Z_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\alpha_k = 0$ pour tout $k \leq -1$, cette solution est causale.

- (9) Donner (en fonction de la fonction cos) la mesure spectrale de X . Toujours d'après le cours, la mesure spectrale de X est

$$\nu_X(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi|\Phi(e^{i\theta})|^2} = \frac{d\theta}{2\pi|3 - e^{i\theta}|^4} = \frac{d\theta}{2\pi[100 - 120 \cos \theta + 36(\cos \theta)^2]}, \quad |\theta| \leq \pi.$$

- (10) Déterminer les prédicteurs progressifs de X_t (pour tous les ordres). Notons $\hat{X}_{t,p}$ le prédicteur progressif de X_t d'ordre $p \geq 1$. L'équation ARMA donne directement

$$X_t = \frac{1}{9}(Z_t + 6X_{t-1} - X_{t-2}) = \frac{1}{9}Z_t + \frac{2}{3}X_{t-1} - \frac{1}{9}X_{t-2}.$$

Comme X est causal, on en déduit directement que pour tout $p \geq 2$

$$\hat{X}_{t,p} = \frac{2}{3}X_{t-1} - \frac{1}{9}X_{t-2}.$$

Il reste le cas $p = 1$. On a, par définition du prédicteur, $\hat{X}_{t,1} = aX_{t-1}$ où $a = \gamma_X(1)/\gamma_X(0)$. On a d'une part, en notant γ_X la fonction d'auto-covariance de X :

$$\text{Cov}(9X_t - 6X_{t-1} + X_{t-2}, X_{t-1}) = 9\gamma_X(1) - 6\gamma_X(0) + \gamma_X(1) = 10\gamma_X(1) - 6\gamma_X(0),$$

et d'autre part, en utilisant l'équation et le fait que X est causale:

$$\text{Cov}(9X_t - 6X_{t-1} + X_{t-2}, X_{t-1}) = \text{Cov}(Z_t, X_{t-1}) = 0,$$

d'où l'on tire finalement $a = 3/5$.

Exercice 4. Soit E l'espace des processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs réelles et bornés dans L^2 , muni de la norme $\|X\|_E = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_t\|_2$, où $\|X_t\|_2 = [\mathbb{E}(X_t^2)]^{1/2}$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E , muni de la norme subordonnée $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup\{\|A(X)\|_E : \|X\|_E = 1\}$. On admet que E et $\mathcal{L}(E)$ munis de leurs normes respectives sont des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets). On définit l'opérateur de retard B par $B(X) = (X_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}$ pour tout $X \in E$.

- (11) Montrer que B est une isométrie sur E , c'est-à-dire que $B \in \mathcal{L}(E)$, B est inversible, et $\|B(X)\|_E = \|X\|_E$ pour tout $X \in E$. L'opérateur B est clairement linéaire, d'inverse $B^{-1}(X) = (X_{t+1})_{t \in \mathbb{Z}}$. De plus, pour tout $X \in E$,

$$\|B(X)\|_E = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_{t-1}\|_2 = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_t\|_2 = \|X\|_E.$$

On en déduit en particulier que B est continu.

- (12) Montrer que si $\alpha \in \ell_1(\mathbb{Z})$ alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n B^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$. On note $F(\alpha)$ cette somme. L'espace $\mathcal{L}(E)$ étant un espace de Banach, on peut utiliser le critère de convergence normale pour les séries. Ce critère est vérifié, puisque $\|B\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$ et donc:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\alpha_n B^n\|_{\mathcal{L}(E)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n| \|B^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n| \|B\|_{\mathcal{L}(E)}^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n| < +\infty.$$

- (13) Rappeler la définition du produit de convolution $\alpha \star \beta$ et montrer que $F(\alpha \star \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in \ell_1(\mathbb{Z})$. On rappelle que $\alpha \star \beta$ est l'élément de $\ell_1(\mathbb{Z})$ défini par

$$(\alpha \star \beta)_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k-j}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On a

$$\begin{aligned} F(\alpha) \circ F(\beta) &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n B^n \right) \circ \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m B^m \right) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \alpha_n \beta_m (B^n \circ B^m) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \alpha_n \beta_m B^{n+m} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ n+m=k}} \alpha_n \beta_m B^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha \star \beta)_k B^k = F(\alpha \star \beta). \end{aligned}$$

L'interversion des séries à la première ligne peut se justifier par convergence normale.

- (14) On note I l'opérateur identité, i.e. $I(X) = X$ pour tout $X \in E$. Montrer que l'opérateur $I - 2B$ est inversible et déterminer son inverse sous la forme d'une série. Notons tout d'abord que $I - 2B = F(\alpha)$, avec $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -2$ et $\alpha_k = 0$ sinon. Clairement α est dans $\ell_1(\mathbb{Z})$. De plus, sa représentation en série de puissances est $P_\alpha(z) = 1 - 2z$ pour tout $z \in \mathbb{U}$, qui n'a aucune racine sur le cercle unité. On en déduit par le cours que α est inversible et que l'inverse α^{-1} a pour série de puissance

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \frac{1}{1 - 2z} = - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2z)^k}, \quad z \in \mathbb{U}.$$

On en déduit d'après la dernière question (noter que $F(e) = I$, où e est l'élément neutre de $\ell_1(\mathbb{Z})$ pour le produit de convolution) que $I - 2B$ est inversible d'inverse

$$F(\alpha^{-1}) = - \sum_{k \geq 1} 2^{-k} B^{-k}.$$

TIME SERIES. RETAKE EXAM (2H).

(Version française au dos)

Documents and electronic devices are not allowed. Answers must be justified and readable. The quality of writing may be taken into account in the grading. The marking scheme is provided for guidance only. You may answer in French or English. Exercises are mutually independent.

Exercise 1. Basic notions.

- (1) Define the sequence of Fourier coefficients of a finite non-negative measure on $[-\pi, \pi]$.
- (2) Recall the definition of a complex sequence of positive type (in the complex sense).
- (3) Finally, state Herglotz's spectral representation theorem.

Exercise 2. Let Z be a centered white noise with unit variance. We consider the following ARMA(1,2) equation:

$$X_t - X_{t-1} = Z_t - 2\beta Z_{t-1} + Z_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

with parameter $\beta \in \mathbb{R}$.

- (4) Put the equation in the form ARMA(Φ, Ψ) where Φ and Ψ are two polynomials to be determined.
- (5) Depending on the parameter $\beta \in \mathbb{R}$, discuss the number of stationary (respectively *linear* stationary) solutions to this equation.
- (6) In the case $\beta = 1$, give (with a justification) an (explicit) linear stationary solution and an (explicit) non-linear stationary solution. Explain why the latter solution is not linear.

Exercise 3. Let Z be a centered white noise with unit variance. We consider the following AR(2) equation:

$$9X_t - 6X_{t-1} + X_{t-2} = Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- (7) Show that this equation has a unique stationary solution, which we still denote by X .
- (8) Write X as an explicit filtering of Z . Show that X is causal.
- (9) Give (as a function of the cos function) the spectral measure of X .
- (10) Determine the progressive predictors of X_t (of all orders).

Exercise 4. Let E be the space of real-valued processes $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ which are bounded in L^2 , equipped with the norm $\|X\|_E = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_t\|_2$, where $\|X_t\|_2 = [E(X_t^2)]^{1/2}$. We note $\mathcal{L}(E)$ the space of continuous linear mappings from E to E , equipped with the operator norm $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup\{\|A(X)\|_E : \|X\|_E = 1\}$. We admit that E and $\mathcal{L}(E)$ are Banach spaces (complete normed vector spaces) once equipped with their respective norms. We define the shift operator B by $B(X) = (X_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}$ for every $X \in E$.

- (11) Show that B is an isometry on E , that is to say $B \in \mathcal{L}(E)$, B is invertible, and $\|B(X)\|_E = \|X\|_E$ for every $X \in E$.
- (12) Show that if $\alpha \in \ell_1(\mathbb{Z})$ then $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n B^n$ is a converging sum in $\mathcal{L}(E)$. We denote by $F(\alpha)$ this sum.
- (13) Recall the definition of the convolution product $\alpha \star \beta$ and show that $F(\alpha \star \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta)$ for every $\alpha, \beta \in \ell_1(\mathbb{Z})$.
- (14) We write I for the identity operator, i.e. $I(X) = X$ for every $X \in E$. Show that the operator $I - 2B$ is invertible and determine its inverse as an infinite sum.